

1. 某個線性規劃模式，使用簡捷法(Simplex Method)求算最佳解的表格如下所示：

Basic Variable	Coefficient of						Right Hand Side
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	
Z	1	0	0	0	9	-1	41
X ₃	0	0	0	1	4	-1.5	17
X ₁	0	1	0	0	1	-0.5	3
X ₂	0	0	1	0	1	0	5

請寫出此線性規劃模式的目標函數與限制式，請詳述計算過程 (15 分)

2. 考慮以下數學規劃模式：

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

Subject to

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(1) 請寫出上述數學規劃模式的對偶問題 (10 分)

(2) 若 X_4, X_5, X_6 為上述限制式的 slack variables，假定最佳解的基變數為 $X_1=21, X_2=24, X_6=7$ ，請用鬆弛寬鬆特性找出對偶問題的最佳解($Y_1 \sim Y_6$ ，包含 surplus variables)，用簡捷法直接求解不給分 (12 分)

3. 考慮以下非線性規劃模式：

$$\text{Maximize } Z = x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

subject to

$$1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9$$

(1) 請問此模式是二次規劃模式嗎？是或否，請解釋原因 (6分)

(2) 請問此模式的目標函數是 convex, concave, or neither (8分)

(3) 請寫出上述非線性規劃模式的KKT條件 (10分)

4. 義美公司生產三種糖果棒，每根糖果棒完全由砂糖和巧克力組成，現有砂糖 50 盎司與巧克力 100 盎司可供使用，設 x_i 為生產第 i 種糖果棒的數量，形成的數學規劃模式如下所示：

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \text{ (利潤)}$$

Subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \text{ (砂糖限制式)}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \text{ (巧克力限制式)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

其中， x_4 and x_5 為上述限制式的 slack variables，使用簡捷法(Simplex Method)求算到最後一個步驟的表格如下所示：

Basic Variable	Coefficient of						Right Hand Side
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	1	3	0	0	4	1	300
x_3	0	0.5	0	1	1.5	-0.5	25
x_2	0	0.5	1	0	-0.5	0.5	25

請使用敏感度分析回答下列問題 (不要用簡捷法重新求解)

- (1) 請問第一種糖果棒的利潤在何種變動範圍下，現有的最佳解($x_2=25, x_3=25$)仍會維持不變 (8分)
- (2) 請問第二種糖果棒的利潤在何種變動範圍下，現有的最佳解仍會維持不變 (8分)
- (3) 請問砂糖的量在何種變動範圍下，最佳解的basis仍會維持不變 (8分)

5. 瑪琍歐公司開發了兩種新玩具，若要開始生產，需支付設置生產設施的費用：玩具 1 需要 50,000 美元，玩具 2 需要 80,000 美元，一旦支付了這些成本後，玩具 1 每單位可獲利 10 美元，玩具 2 每單位可獲利 15 美元。瑪琍歐公司擁有兩間工廠能夠生產這些玩具；然而，為避免重複支付設置成本，只能選擇其中一間工廠來生產。此外，出於管理上的考量，若同時生產這兩種新玩具，則必須在同一間工廠完成。在產能方面：工廠 1 每小時可生產 50 個玩具 1 及 40 個玩具 2；工廠 2 每小時可生產 40 個玩具 1 及 25 個玩具 2；工廠 1 與工廠 2 分別擁有 500 小時與 700 小時的生產時間，可用於生產這些新玩具，請問應該各生產多少單位的玩具 1 與玩具 2，才能使總利潤最大化，請寫出上述問題的數學規劃模式(MIP model)，不用進行求解 (15 分)